数理解析研究所講究録
403巻 1980年 21-44

On versality for unfoldings of smooth section-germs.

奈良女子大学理学部　泉屋 周一

Shyūichi Izumiya
Department of Math.
Nara womens Univ.

ABSTRACT : Let $\mathcal{C}$ be a category. We shall say that an object $V \in \mathcal{C}$ is <u>versal</u> if there is a morphism $\Phi \in \mathrm{HOM}(0,V)$ for any object $0 \in \mathcal{C}$.

There is a problem to characterize the versal object in various categories.

In this article, we consider the problem for the category of unfoldings of smooth section-germs. The main theorem is the following :

THEOREM. *Let* $(\Gamma_E^{\Lambda}(n), \mathcal{G}_E(n), R(n))$ *be an essential triple. We suppose that* $\dim_{\mathbb{R}} \langle C_0^{\Lambda}(\mathbb{R}^n, V)\rangle_{R(n)} / C_0^{\Lambda}(\mathbb{R}^n, V) + T_{\sigma}^{\mathcal{G}}(\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)) < \infty$.

If Σ *is an infinitesimally versal* Λ*-unfolding of* $\sigma \in \Gamma_E^{\Lambda}(n)_0$, *then* Σ *is versal*.

As applications of this theorem, we have versality theorems for C^{∞}-map-germs (Martinet [4], Mather [5], Zakalyukin [9]), G-equivariant map-germs (Poenaru [7]), and solutions of a linear partially differential equations (Example A-5).

§0 序節

カテゴリー$\mathbb{C}$において，object $V\in\mathbb{C}$がversal objectであるとは，任意のobject $O\in\mathbb{C}$に対して，morphism $\Phi\in Hom(O.V)$が存在する時に言う．様々なカテゴリーにおいてversal objectを特徴づけることが1つの問題としてある．近年，smooth map-germsの間の種々の同値関係に対応するunfoldingsのカテゴリーにおいて"versality theorem"が証明された（[4]，[5]，[9]）．一方，smooth vectorfield-germsのsmooth equivalentに対応するunfoldingsのカテゴリーの様に"versality theorem"が成立しない例が知られている（[1]）．この小論の目的は，これらをvector束のsmooth section-germsとしてつかまえて，どの様な場合に"versality theorem"が成立するかを特徴づける事にある．我々の主要定理によると，上記の諸定理が得られるばかりでなく，G-invariant function-germsのG-unfoldings（[7]），や線型偏微分方程式の解としてあらわれるsmooth section-germs（i.e. 調和函数芽 etc）の種々の同値関係に対応するunfoldings等のカテゴリーにおける"versality theorem"が応用例として得られる．

§1 定義と主要定理

MをC^∞-manifold，$E(M)$をfibreとして$V(M)$をもつM上のC^∞-vector bundleとする．$\Gamma_E^\infty(M)$で$E(M)$のlocal smooth section全体の集合をあらわし，$\Gamma_E^{\wedge}(M)$をその subset とする．次に，$\mathcal{D}(M)$でM上の local diffeo全体のつくる pseudo groupを表わす．

<u>定義 1.1</u>．　$\mathcal{G}_E(M)$が <u>essential sub pseudogroup of</u> $\mathcal{D}(M)\times\mathcal{D}(E(M))$であるとは，次の2条件を満足する事と定義する：　i) $\mathcal{G}_E(M)$は$\mathcal{D}(M)\times\mathcal{D}(E(M))$の sub pseudo group である．ii) $\mathcal{G}_E(M)$の任意元(h, H)において，Hはhを cover するE(M)の local smooth fibre bundle automorphism である．

さて，この時，我々は$\Gamma_E^{\wedge}(M)$の元の germs に対して$\mathcal{G}_E$-equivalentという概念を定義することができる．

<u>定義 1.2</u>．　$\alpha:(M,a)\to(E(M),b)$と$\alpha':(M,a')\to(E(M),b')$を$\Gamma_E^{\wedge}(M)$の元を代表元としてもつ E(M)の smooth section-germs とする．この時，αとα'が<u>$\mathcal{G}_E$-equivalent</u>であるとは次の条件を満足する事と定義する：　$\mathcal{G}_E(M)$の元(h, H)で$h(a)=a'$，$H(b)=b'$を満足するものが存在して，aにおける germ として$H\circ\alpha=\alpha'\circ h$が成立する．

我々はこの$\mathcal{G}_E$-equivalenceに対応して$\Gamma_E^{\wedge}(M)$に値をもつ様な unfoldingsのカテゴリーを構成することができるが，今後すべて germs の話となるので，$M=\mathbb{R}^n$として，すべて原点における germs に話をかぎる．

<u>NOTATION</u>：　$\Gamma_E^{\wedge}(n)\equiv\{\alpha \mid \alpha:(\mathbb{R}^n,0)\to E(\mathbb{R}^n)$: germ of

elements in $\Gamma^{\wedge}_{E}(\mathbb{R}^n)$ at 0 $\}$.

$\Gamma^{\wedge}_{E}(n)^0 \equiv \{ \alpha \in \Gamma^{\wedge}_{E}(n) \mid \alpha(0) = 0 \in \mathbb{R}^n \times V(\mathbb{R}^n) \cong E(\mathbb{R}^n) \}$.

$\mathcal{G}_E(n) \equiv \{ (h, H) \mid (h, H)$: germ of elements in $\mathcal{G}_E(\mathbb{R}^n)$ at 0 with $(h(0), H(0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times E(\mathbb{R}^n) \}$.

次に，$\Gamma^{\wedge}_{E}(n)$ に値をもつ unfoldings を定義する.

<u>定義 1.3</u>. $\Gamma^{\wedge}_{E}(n)^0 \ni \alpha$ に対して，smooth map-germ $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0,0)) \longrightarrow (E(\mathbb{R}^n), 0)$ が <u>α の k次元 Λ-unfolding</u> であるとは，次の条件を満足する事とする：

(i) $\Sigma_u \in \Gamma^{\wedge}_{E}(n)$ (ただし，$\Sigma_u(x) \equiv \Sigma(x, u)$ for $^\forall (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0,0))$ と定義する)

(ii) $\Sigma_0 = \alpha$.

<u>注意</u>: 我々は上記Σを"unfolding"と呼んだが，これは"deformation"と呼んだ方が良いかもしれない. unfolding という意味からみると，パラメーターが $E(M)$ のファイバーにも影響を及ぼす(i.e Σ を $E(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$ の section-germs として定義する)様にすべきなのかもしれない.

<u>定義 1.4</u>. $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma^{\wedge}_{E}(n)^0$ の Λ-unfolding とする. $f : (\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ を smooth map-germ とする時，$\Omega(x, v) := \Sigma(x, f(v))$ for $^\forall (x, v) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0))$ で定義される map-germ

$$\Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \longrightarrow (E(\mathbb{R}^n), 0)$$

は，α の k 次元 Λ - unfolding である．これを $f^*\Sigma$ と書いて，
Σ の f による induced Λ - unfolding と呼ぶ．

定義 1.5. $\Sigma, \Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0,0)) \longrightarrow (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma_{\hat{E}}(n)^0$ の k 次元 Λ - unfoldings とする．Σ と Ω が $\mathcal{G}_E$ - equivalent とは，次の条件を満足する事とする：

map-germ $(h, H) : (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathcal{G}_E(n)$ で

(i) $(h, H)(0) = 1$

(ii) $\widetilde{(h, H)} : (\mathbb{R}^n \times E(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k, (0,0,0)) \to (\mathbb{R}^n \times E(\mathbb{R}^n), (0,0))$

by $\widetilde{(h, H)}(x, y, u) \equiv (h(u)(x), H(u)(y))$

が smooth map-germ

を満足するものが存在して，次の diagram を可換にする：

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "\Sigma_u"] \arrow[d, "h(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (E(\mathbb{R}^n), 0) \arrow[d, "H(u)"] \\ (\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "\Omega_u"'] & (E(\mathbb{R}^n), 0) \end{tikzcd} \quad \text{for } {}^\forall u \in (\mathbb{R}^k, 0).$$

定義 1.6. $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \longrightarrow (E(\mathbb{R}^n), 0)$,
$\Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \longrightarrow (E(\mathbb{R}^n), 0)$ をそれぞれ $\alpha \in \Gamma_{\hat{E}}(n)^0$ の Λ - unfoldings とする．Ω から Σ への $\mathcal{G}_E$ - morphism $\Phi : \Omega \to \Sigma$ とは，3対 $\Phi = ((h, H), f)$ であり，$(h, H) : (\mathbb{R}^s, 0) \to \mathcal{G}_E(n)$ は map-germ で定義 1.5 における (i) (ii) を満足するもの，$f : (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$ は C^∞ - map-germ であって，$f^*\Sigma$ が

$\mathfrak{R}$ と $(\hat{h}, H)$ によって $\mathcal{G}_E$-equivalent となる事とする.

この様にして, $\alpha \in \Gamma\hat{E}(n)^0$ の $\mathcal{G}_E$-equivalence に対応する Λ-unfoldings のカテゴリーが構成されたが, このカテゴリーにおける "versal object" とは以下の物である.

定義 1.7. $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma\hat{E}(n)^0$ の Λ-unfolding とする. Σ が α の versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E(n)$ であるとは, 任意にあたえられた α の Λ-unfolding $\mathfrak{R}$ に対して, $\mathcal{G}_E$-morphism $\Phi : \mathfrak{R} \to \Sigma$ が存在する事とする.

さて, versal Λ-unfoldings を特徴づけるための有力な候補として以下の様に formulate されるところの infinitesimally versal Λ-unfoldings という概念がある.

今, $\Theta(n)$ で $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞-vector fields の 0 における germ 全体をあらわす. この時, 常微分方程式の解の存在定理により任意の $\xi \in \Theta(n)$ に対して, 一意的に $\varphi : (\mathbb{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon), (0,0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ という C^∞-map-germ で $\varphi_t \in \mathcal{D}(n)$ かつ $\varphi_0 = 1$ をみたすものが存在して, $\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0} = \xi$ と書けることを注意しておく.

さて $\mathcal{G}_E$ に対応する "Lie 環" $\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)$ を以下の様に定義する: $\Theta_E^{\mathcal{G}}(n) \equiv \left\{ (\xi, \eta) \in \Theta(n) \times \Theta(E(n)) \;\middle|\; \xi = \left.\frac{d\hat{h}_t}{dt}\right|_{t=0},\ \eta = \left.\frac{dH_t}{dt}\right|_{t=0} \right.$ for $\left. (\hat{h}_t, H_t) \in \mathcal{G}_E(n)\ \&\ (\hat{h}_0, H_0) = 1 \right\}$. 一般に $\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)$ は $\Theta(n) \times \Theta(E(n))$ の $\mathbb{R}$-linear subspace となる.

次に, $\alpha \in \Gamma\hat{E}(n)^0$ に対して

$$\widetilde{T}_\alpha : \Theta(n) \times \Theta(E(n)) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n))$$

を $\widetilde{T}_\alpha(\xi, \eta) := d\alpha \circ \xi + \eta \circ \alpha$ で定義する.

(ただし, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n))$ を $\mathbb{R}^n$ から $E(\mathbb{R}^n)$ への原点における C^∞-map-germs 全体とする). さらに $E(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \oplus V(\mathbb{R}^n)$ をつかって $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n)) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ という分解を考え, $\pi_V : C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ を canonical projection とする. この時 $T_\alpha \equiv \pi_V \circ \widetilde{T}_\alpha$ と表わす.

<u>定義 1.8.</u> $T_\alpha^{\mathcal{G}} \equiv T_\alpha|_{\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)} : \Theta_E^{\mathcal{G}}(n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ を α の <u>infinitesimal map relative to $\mathcal{G}_E(n)$</u> と呼ぶ

ここで

<u>仮定(*)</u>. $\Gamma_E^{\wedge}(n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n))$ であるが, 今 $\pi_V(\Gamma_E^{\wedge}(n))$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, E(\mathbb{R}^n))$ の $\mathbb{R}$-affine space (i.e $\pi_V(\Gamma_E^{\wedge}(n)) \ni {}^\forall\alpha, \omega$ に対して, $\{t\alpha + (1-t)\omega \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \pi_V(\Gamma_E^{\wedge}(n))$) であると仮定する.

<u>注意</u> 今, 任意の $\alpha \in \Gamma_E^{\wedge}(n)$ について,

$$C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))_\alpha := \{\tau \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \mid \tau = \omega - \pi_V(\alpha) \ \text{ for } \omega \in \pi_V(\Gamma_E^{\wedge}(n))\}$$

とおくと, これは $\mathbb{R}$-linear subspace of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ となり, 次の性質をもつ.

1) 任意の $\alpha, \alpha' \in \Gamma_E^{\wedge}(n)$ に対して, $C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))_\alpha = C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))_{\alpha'}$ (この事実より, $C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ と書く).

2) $f : (\mathbb{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon), 0 \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \longrightarrow V(\mathbb{R}^n)$ という C^∞-map-germ

(τ)

で，$f_t \in \pi_V(\Gamma_E^{\wedge}(n))$ かつ $f_0 = \pi_V(\alpha)$ を満足するものに対して $\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0} \in C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ が成立する．

さて，$\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma_E^{\wedge}(n)^0$ の Λ-unfolding とする，この時，$\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to V(\mathbb{R}^n)$ について，$\Sigma_u \in \Gamma_E^{\wedge}(n)$ & $\Sigma_0 = \alpha$ が成立しているので $\left.\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} \in C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ である．従って，$\mathbb{R}$-linear space $V_\Sigma \equiv \left\langle \left.\frac{\partial \Sigma}{\partial u_1}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0}, \cdots, \left.\frac{\partial \Sigma}{\partial u_r}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ は $C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ の subspace となる．

<u>定義 1.9.</u> $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma_E^{\wedge}(n)^0$ の Λ-unfolding とする．Σ が <u>infinitesimally versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$</u> であるとは，以下の式を満足する事である：

$$C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \subset T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n)) + V_\Sigma .$$

この時，次の命題を得る．

<u>命題 A</u> $\dim_{\mathbb{R}} \frac{C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) + T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))}{T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))} < +\infty$ <u>なる $\alpha \in \Gamma_E^{\wedge}(n)$ に対して，Σ を α の versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ とする時それは α の infinitesimally versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ である．</u>

［証明］ $T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))^{\wedge} \equiv T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n)) \cap C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ とおくと，$\dim_{\mathbb{R}} \frac{C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))}{T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))^{\wedge}} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) + T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))}{T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))} = s < +\infty$ である．従って，$C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ の元 $b_1, \cdots, b_s$ で，$\{b_1\}, \cdots \{b_s\}$ が $\frac{C_0^{\wedge}(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))}{T_\alpha^{\mathcal{G}}(\theta_E^{\mathcal{G}}(n))^{\wedge}}$ を $\mathbb{R}$ 上生成するものが存在する．

今，$\mathfrak{L}: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を

$\mathfrak{L}(x, v) \equiv (x, \pi_V(\alpha)(x) + v_1 b_1(x) + \cdots + v_s b_s(x))$ for $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$

で定義すると，これは infinitesimally versal Λ-unfolding of α relative to $\mathcal{G}_E$ となる．Σ が versal Λ-unfolding of α relative to $\mathcal{G}_E$ なので，$\mathcal{G}_E$-morphism $\Phi: \mathfrak{L} \to \Sigma$ が存在する．従って，$\mathcal{G}_E$-morphism の定義と直接的な計算により，Σ は，infinitesimally versal Λ-unfolding of α relative to $\mathcal{G}_E$ となる．

［証明終］

一般に，この命題の逆が成立する時 "versality theorem" が成立すると言う．以下 "versality theorem" が成立するための条件を特徴づける事がこの小論の目的であるが，以上の他に，$\mathbb{R}^n$ の微分構造（又は $\mathbb{R}^n$ 上の local $\mathbb{R}$-algebra）に関連した条件が必要になる．$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \{ f \mid f: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R} : C^\infty\text{-function-germ} \}$

<u>定義 1.10</u>. 任意の自然数 n を固定する時，$R(n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が <u>finite type の sub $\mathbb{R}$-algebra</u> であるとは，以下の条件を満足する事である：

(i) $R(n)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の sub $\mathbb{R}$-algebra である

(ii) 有限個の元 $P_1, \cdots, P_k \in R(n)$ が存在して，

$P \equiv (P_1, \cdots, P_k) : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^k, a)$ という C^∞-map-germ により，$P^*: C_a^\infty(\mathbb{R}^k) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ by $P^*(h) \equiv h \circ P$ を考えるとき，$P^*(C_a^\infty(\mathbb{R}^k)) = R(n)$ が成立する．

さて，$Aut_E^\infty(M)$ を $E(M)$ の local smooth fibre bundle aut 全体のつくる pseudogroup とすると，これは essential pseudogroup の中で最大のものである．今，$Aut_E^\infty(n)$ に対応する "Lie 環" を $\Theta_E^A(n)$ と書くと，これは自然に $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$－module となる．また，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ は自然に $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$－module となる．今，$R(n)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の sub $\mathbb{R}$-algebra なので，$\Theta_E^A(n)$ と $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ は自然に $R(n)$－module となる．

<u>定義 1.11</u>．3対 $(\Gamma_E^\wedge(n), \mathcal{G}_E(n), R(n))$ が <u>essential</u> であるとは，(i) $\Gamma_E^\wedge(n)$ は仮定(*)をみたす section-germs の集合

(ii) $\mathcal{G}_E(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{D}(E(\mathbb{R}^n))$ の essential subpseudgroup

(iii) $R(n)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の finite type の sub $\mathbb{R}$-algebra

であり，かつ次の条件をみたすものである：

(a) $\langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))\rangle_{R(n)}$ は finitely generated $R(n)$－module であり，かつ $T_\alpha^{\mathcal{G}}(\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)) \subset \langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))\rangle_{R(n)}$ for $\forall\alpha\in\Gamma_E^\wedge(n)$

(b) $\Theta_E^{\mathcal{G}}(n)$ は $\Theta_E^A(n)$ の $R(n)$－submodule

(c) $T_\alpha^{\mathcal{G}} : \Theta_E^{\mathcal{G}}(n) \longrightarrow \langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))\rangle_{R(n)}$ は $R(n)$－homomorphism for $\forall\alpha\in\Gamma_E^\wedge(n)$.

この時，我々の主要定理は以下のものである．

<u>定理 B (Versality theorem)</u> $(\Gamma_E^\wedge(n), \mathcal{G}_E(n), R(n))$ <u>を essential な3対として</u>，$\dim_{\mathbb{R}} \dfrac{\langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))\rangle_{R(n)}}{C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) + T_\alpha^{\mathcal{G}}(\Theta_E^{\mathcal{G}}(n))} < +\infty$ <u>を満足する</u> $\alpha\in\Gamma_E^\wedge(n)^\circ$ <u>に対して</u>，$\Sigma_{(10)}$ <u>を infinitesimally versal Λ-unfolding</u>

of α relative to $\mathcal{G}_E$ とするならば，それは versal Λ-unfolding of α relative to $\mathcal{G}_E$ である．

§2. 定理Bの証明の概略．

ここでは，定理Bの証明に必要な補題をあげ，それにより定理Bを証明する．くわしくは，Izumiya [3] を参照．

定理Bを証明するためには，次の補題が鍵である．

補題 2.1. 定理Bと同じ仮定の下で，

Σ, Ω : $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma_E(n)^0$ の r 次元 Λ-unfoldings relative to $\mathcal{G}_E$ とする．もし，Σ，Ω が両方ともに infinitesimally versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ ならば，Σ と Ω は $\mathcal{G}_E$-isomorphic である．

この補題2.1.を仮定すると定理Bはただちに証明する事ができる．

[定理Bの証明] $\Sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma_E(n)^0$ の infinitesimally versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ とする．今，$\Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を α の他の任意の Λ-unfolding とする． $\Omega_1^*(x,u,v) \equiv \pi_V(\Omega)(x,v) - \pi_V(\alpha)(x) + \pi_V(\Sigma)(x,u)$ for $\forall (x,u,v) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, (0,0,0))$ とおくと，$\pi_V(\Gamma_E(n))$ が affine $\mathbb{R}$-space なので $\Omega^* : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+s}, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ def by $\Omega^*(x,u,v) = (x, \Omega_1^*(x,u,v))$ は α の Λ-unfolding となり，その偏微分 $\frac{\partial \Omega^*}{\partial u_i}$ は $\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i}$ $(i=1, \cdots r)$ に等しい．従って，

$V_\Sigma \subset V_{\Omega^*}$ となり，Σ が infinitesimally versal なので，Ω^* も infinitesimally versal である．また，$\Sigma^* : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+s}, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\Sigma^*(x,u,v) \equiv \Sigma(x,u)$ と定義すると，同様にして，Σ^* は infinitesimally versal Λ-unfolding of α relative to $\mathcal{G}_E$ である．

しかも両方とも $(r+s)$-次元であるから，補題2.1. より Σ^* と Ω^* は $\mathcal{G}_E$-isomorphic である．さらに Ω は Ω^* の canonical inclusion i による induced Λ-unfolding であり，かつ Σ^* は Σ の canonical projection π による induced Λ-unfolding であるので，Ω から Σ への $\mathcal{G}_E$-morphism が存在する． ［証明終］

従って，補題2.1. を証明すれば良いのであるが，その為に必要な2～3の補題を述べる（証明は省略する）．

<u>定義2.2.</u> $\Sigma, \Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \hat{\Gamma}_E(n)^0$ の infinitesimally versal Λ-unfoldings relative to $\mathcal{G}_E$ とする．

Σ と Ω が <u>linear versally homotopic relative to $\mathcal{G}_E$</u> とは，

$$\Sigma_t(x,u) \equiv (x,\ t\pi_V(\Omega)(x,u) + (1-t)\pi_V(\Sigma)(x,u))$$

とおいた時，任意の $t \in [0,1]$ について，Σ_t が infinitesimally versal Λ-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ である時に言う．

<u>補題2.3. linear versally homotopic な Λ-unfoldings に対して，補題2.1.の主張を示せば，任意の Λ-unfoldings に対して，補題2.1 の主張が成立する．</u>

次に，常微分方程式にかんする1つの補題を必要とする。

$\Sigma, \Omega : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (0,0)) \to (E(\mathbb{R}^n), 0)$ を $\alpha \in \Gamma^{\wedge}_{E}(n)^0$ の Λ-unfoldings とする．さらに $b_1, \cdots, b_s \in C^{\wedge}_0(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))$ を fixed する．このとき

$$\widetilde{\Phi}(x,u,v,t) \equiv \left(x,\ t\pi_V(\Omega)(x,u) + (1-t)\cdot\pi_V(\Sigma)(x,u) + \sum_{j=1}^{s} v_j b_j(x) \right)$$

for $\forall (x,u,v,t) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}, 0)$

とおくと，$\widetilde{\Phi}$ は α の Λ-unfolding である．次に

$$\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times V(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}$$

を $\Psi(x,u,v,t) \equiv (\widetilde{\Phi}(x,u,v,t),\ u, v, t)$

によって定義する．

$\theta(n+r+s+1)$ の元 $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u,v,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \eta_j(x,u,v,t)\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\ell=1}^{s} \tau_\ell(x,u,v,t)\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \zeta(x,u,v,t)\frac{\partial}{\partial t}$ に対して，

$$\Psi'(X) \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u,v,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}\cdot\xi_i + \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_j}\cdot\eta_j + \sum_{\ell=1}^{s}\tau_\ell\cdot b_\ell^k + \zeta\cdot\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{r}\eta_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\ell=1}^{s}\tau_\ell\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \zeta\cdot\frac{\partial}{\partial t}$$

（ただし，$\Phi(x,u,t) \equiv (x,\ t\pi_V(\Omega)(x,u) + (1-t)\pi_V(\Sigma)(x,u))$ とおく）と定義し，さらに $\theta(E(n)+r+s+1)$ の元 $Y = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q}\lambda_k(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{r}\eta_j(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\ell=1}^{s}\tau_\ell(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \zeta(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial t}$（ただし，$\dim V(\mathbb{R}^n) = q$ としてその原点のまわりのある coordinate を $(y_1, \cdots, y_q)$ とする）に対して，

$$(Y\circ\Psi)' \equiv \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,y,u,v,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q}\left(\lambda_k(\Phi(x,u,t),u,v,t) + \sum_{\ell=1}^{s}\tau_\ell\, b_\ell^k\right)\frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{r}\eta_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{\ell=1}^{s}\tau_\ell\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \zeta\cdot\frac{\partial}{\partial t}$$ と定義する．

この時，次の補題を得る．

補題2.4. $\Theta(n+r+s+1)$ の元 X と $\Theta(n+q+r+s+1)$ の元 Y で，次の条件を満足するものが存在すると仮定する．

1) $\Psi'(X) = (Y \cdot \Psi)'$

2) $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \eta_j(u,t)\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\ell=1}^{s} \tau_\ell(u,t)\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial t}$ とかける．（ただし，$\xi_i \in \mathfrak{m}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r+1})$, $\eta_j, \tau_\ell \in \mathfrak{m}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{r+1})$）.

3) $Y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k(x,y,u,t)\frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{r} \eta_j(u,t)\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\ell=1}^{s} \tau_\ell(u,t)\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial t}$ とかける．（ただし，$\lambda_k \in \mathfrak{m}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+q+r+1})$）.

4) $X'_{(u,t)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,u,t)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y'_{(u,t)} \equiv \sum_{k=1}^{q} \lambda_k(x,y,u,t)\frac{\partial}{\partial y_k}$ とおく時，$(X'_{(u,t)},\ X'_{(u,t)} \oplus Y'_{(u,t)}) \in \Theta_E^{g}(n)$ for $\forall (u,t) \in (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0)$.

この時，$\Phi_0 = \Sigma$ と Φ_t は十分小さな $t>0$ に対して，g_E－isomorphic である。

さらに，local $\mathbb{R}$-algebra $R(n)$ の性質について言及する必要がある．今，任意の $r \in \mathbb{N}$ について，

$$C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r}) \equiv \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r}) \mid f_u \in R(n) \text{ for } \forall u \in (\mathbb{R}^r, 0) \}$$

とおくと，これは $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r})$ の sub $\mathbb{R}$-algebra となる．

$\pi : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$ を projection とすると，ring homo $\pi^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^r) \longrightarrow C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r})$ が well-defined である．

補題2.5. $\pi^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^r) \to C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r})$ は Weierstraß性を持つ．（i.e. A : finitely generated $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r})$－module で，かつ $\dim_{\mathbb{R}} A/\pi^*(\mathfrak{m}_r)A < +\infty$ とすると，A は finitely generated $C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$－module via π^* である）.

(14).

Nakayamaの補題を使うと，この補題の系として以下のものが従う．

系　Mを finitely generated $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+k})$-module，$N$を$M$の $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+k})$-submodule，$A$を$M$の finitely generated $C^\infty_0(\mathbb{R}^k)$-submodule via π^* とする．もし $M = N + A + \pi^*(\mathfrak{M}_k) M$ が成立するとしたら，$M = N + A$ である．

さて，定理Bの仮定から，$b_1, \cdots, b_s \in \langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \rangle_{R(n)}$ という有限個の元で，$\{b_1\}, \cdots, \{b_s\}$ が $\dfrac{\langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \rangle_{R(n)}}{T_0^{\mathcal{A}}(\theta_{\mathcal{E}}(n)) + C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))}$ を$\mathbb{R}$上生成するものがある．

次に，

$$\widetilde{C_0^\wedge}(\mathbb{R}^{n+r+1}, V) \equiv \{ h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r+1}, V) \mid h|_{\mathbb{R}^n \times (u,t)} \in \langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V) \rangle_{R(n)} \text{ for } \forall (u,t) \in (\mathbb{R}^{r+1}, 0) \}$$

とおくと，これは $\langle C_0^\wedge(\mathbb{R}^n, V) \rangle_{R(n)}$ が finitely generated $R(n)$-module なので，finitely generated $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r+1})$-module となる．

また，

$$\widetilde{\theta(n+r+1)} \times \widetilde{\theta(E(n)+r+1)} \equiv \{ (X, Y) \mid X : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, (0,0)) \to T\mathbb{R}^n,$$
$$Y : (E(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{r+1}, (0,0)) \to TE(\mathbb{R}^n) \quad : C^\infty\text{-map-germs s.t.}$$
$$(X_{(u,t)}, Y_{(u,t)}) \in \theta(n) \times \theta(E(n)) \text{ for } \forall (u,t) \in (\mathbb{R}^{r+1}, 0) \}$$

とおく（ここで $E(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \times V(\mathbb{R}^n)$ の coordinates を (x, y) とすると，

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x,u,t) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \xi_i(x,y,u,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{g} \eta_j(x,y,u,t) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

とかける）．この時，$\widetilde{\theta(n+r+1)} \times \widetilde{\theta(E(n)+r+1)}$ は自然に $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r+1})$-module となる．

さらに，$\widetilde{\theta^g_E(n+r+1)} \equiv \{ (X,Y) \in \widetilde{\theta(n+r+1)} \times \widetilde{\theta(E(n)+r+1)} \mid$ $(X(u,t), Y(u,t)) \in \theta^g_E(n)$ for $\forall (u,t) \in (\mathbb{R}^{r+1},0) \}$ とおくと，これは $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r+1})$ - module となる（$\theta^g_E(n)$ が $R(n)$ - module なので）．

次に，これらの module の間の homomorphism を次の様に構成する：　$d_X\Phi : T\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1} \longrightarrow TE(\mathbb{R}^n)$　defined by $d_X\Phi((x_0,v),(u,t)) := d(\Phi(u,t))_{x_0}(v)$ に対して，以下の図式をみる．

$$\begin{tikzcd}
T\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1} \arrow[r, "d_X\Phi"] & TE(\mathbb{R}^n) \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1} \arrow[u, "(X, id_{\mathbb{R}^{r+1}})"] \arrow[r, "(\Phi, id_{\mathbb{R}^{r+1}})"'] \arrow[ur, shift left, "d_X\Phi\circ(X, id_{\mathbb{R}^{r+1}})"] \arrow[ur, shift right, "Y\circ(\Phi, id_{\mathbb{R}^{r+1}})"'] & E(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{r+1} \arrow[u, "Y"']
\end{tikzcd}$$
for $\forall (X,Y) \in \widetilde{\theta(n+r+1)} \times \widetilde{\theta(E(n)+r+1)}$.

$\widetilde{\pi}_V \ : \ C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, TE(\mathbb{R}^n)) = C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, E(\mathbb{R}^n) \times E(\mathbb{R}^n))$
$= C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, E(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times V(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, V(\mathbb{R}^n))$

を canonical projection として

$T_\Phi : \widetilde{\theta(n+r+1)} \times \widetilde{\theta(E(n)+r+1)} \longrightarrow C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, V(\mathbb{R}^n))$

を $T_\Phi(X,Y) \equiv \widetilde{\pi}_V(d_X\Phi\circ(X, id_{\mathbb{R}^{r+1}}) + Y\circ(\Phi, id_{\mathbb{R}^{r+1}}))$ により定義する．この時

$T^g_\Phi \equiv T_\Phi \big| \widetilde{\theta^g_E(n+r+1)} \ : \ \widetilde{\theta^g_E(n+r+1)} \longrightarrow C^\infty_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, V(\mathbb{R}^n))$

とおくと，これは各 $T^g_{\Phi(u,t)} : \theta^g_E(n) \to \langle C^\wedge_0(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \rangle_{R(n)}$ が，$R(n)$ - homo なので，$\widetilde{\theta^g_E(n+r+1)}$ から $\widetilde{C^\wedge_0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r+1}, V(\mathbb{R}^n))$ への $C^\infty_{R(n)}(\mathbb{R}^{n+r+1})$ - homo となる．

補題2.5. を使って次の補題を得る.

補題2.6. $m_r \tilde{C}_0^{\wedge}(\mathbb{R}^{n+r+1}, V(\mathbb{R}^n)) = m_r\, T\Phi^g(\widehat{\theta_E^g(n+r+1)})$
$+ \langle \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_r}, b_1, \cdots, b_s \rangle_{m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{r+1})}$.

[補題2.1.の証明]. $\Phi(x, 0, t) = \nu(x)$ なので, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0, t) = 0$.
従って, $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in m_r \tilde{C}_0^{\wedge}(\mathbb{R}^{n+r+1}, V(\mathbb{R}^n))$, 故に, 補題2.6から,
$(X_\ell, Y_\ell) \in \widehat{\theta_E^g(n+r+1)}$, $\xi_\ell \in m_r$ $(\ell = 1, \cdots, p)$ と, $\eta_j(u, t)$,
$\zeta_k(u, t) \in m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{r+1})$ が存在して,
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, u, t) = \sum_{\ell=1}^{p} \xi_\ell\, T\Phi^g(X_\ell, Y_\ell) + \sum_{j=1}^{r} \eta_j(u, t)\frac{\partial \Phi}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^{s} \zeta_k(u, t)\, b_k(x)$$
をみたす. 今, ここで, $\sum_\ell \xi_\ell T\Phi^g(X_\ell, Y_\ell) = T\Phi^g(\sum_\ell(\xi_\ell X_\ell, \xi_\ell Y_\ell))$
かつ $(X_\ell, Y_\ell) \in \widehat{\theta_E^g(n+r+1)} \subset \widehat{\theta(n+r+1)} \times \widehat{\theta(E(n)+r+1)}$ なので,
$$X_\ell = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^\ell(x, u, t)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y_\ell = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^\ell(x, u, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{g} \tau_s^\ell(x, y, u, t)\frac{\partial}{\partial y_s}$$
とかける. あらためて, $\sum_{\ell=1}^{p} \xi_\ell \kappa_i^\ell(x, u, t) = \xi_i(x, u, t)$,
$\sum_{\ell=1}^{p} \xi_\ell \tau_s^\ell = \lambda_s(x, y, u, t)$ とおくと $\xi_i \in m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+r+1})$
かつ $\lambda_s \in m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+g+r+1})$ である.

ここで, $X \equiv \sum_{i=1}^{n}(-\xi_i(x, u, t))\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r}(-\eta_j(u, t))\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum(-\zeta_\ell)\frac{\partial}{\partial v_\ell}$
$+ \frac{\partial}{\partial t}$, $Y \equiv \sum_{i=1}^{n}(-\xi_i(x, u, t))\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{g} \lambda_k(x, y, u, t)\frac{\partial}{\partial y_k} +$
$\sum_{j=1}^{r}(-\eta_j(u, t))\frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{\ell=1}^{s}(-\zeta_\ell)\frac{\partial}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial t}$ とおくと, これらは
あきらかに補題2.4.の条件をみたすベクトル場対である。

[証明終].

§3 応用

最初に，命題Aはいかなるvector bundleのいかなるsmooth section-germsのunfoldingに対しても成立することをことわっておく．従って，定理Bが成立する場合，即ちessential tripleとはどの様な例を含むかが問題となる．

A) $\mathcal{R}(n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の時．

A - 1) $E(M) = M \times \mathbb{R}^p$

① $\mathfrak{g}_E(M) \equiv \mathcal{R}(M) \equiv \{(h, h\times L) \mid h : M$上のlocal diffeo. $L : \mathbb{R}^p$上の平行移動$\}$，$\Gamma^{\wedge}_E(n) = \Gamma^\infty_E(n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ について，

$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \mathcal{R}(n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ はあきらかにessential．

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \ni f$ に対して，$T_f^{\mathcal{R}} = df : \theta(n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ で $df(\theta(n)) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$: submodule. 今，定理Bの仮定はあきらかに満足するので，以下の定理が従う．

定理 3.1. (Thom - Mather - Zakalyukin [5], [9]) F を $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ のunfoldingとする．この時．

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} + V_F$ をみたすならば，F はversal unfolding relative to $\mathcal{R}$ である．

(特に $p=1$ のときが Thom - Matherの初等カタストロフィの話である)．

② $\mathfrak{g}_E(M) = \mathrm{Aut}^V_E(M) := \{(h, H) \mid H$ は $M \times \mathbb{R}^p$ のlocal vector bundle autで h をcoverする$\}$，$\Gamma^{\wedge}_E(n) = \Gamma^\infty_E(n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

実はこの時，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ の元のあいだの $\mathcal{G}_E$-equivalence は Matherの意味での $\mathcal{K}$-equivalence（Mather [6] 参照）であることがわかる．この意味で $\mathcal{G}_E(n) = \mathcal{K}(n,p)$ と書く．

$(C_0^\infty(n,p), \mathcal{K}(n,p), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ はあきらかに essential であり，簡単な計算により，$T_f^{\mathcal{K}}(\theta_E^{\mathcal{K}}(n)) = tf(\theta(n)) + f^*(m_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} + f^*(m_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ となることもわかる．この時，以下の定理が定理Bの例として従う．

<u>定理 3.2</u>（Martinet [4], Golubitsky-Schaeffer [2]）. F<u>を</u> $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ <u>のunfoldingとする</u>．<u>この時</u>

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} + f^*(m_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) + V_F$ <u>をみたすならば</u>，F<u>は versal unfolding relative to</u> $\mathcal{K}(n,p)$ <u>である</u>．

A－2）　$E(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\mathcal{G}_E(\mathbb{R}^n) = \{(h, h \times h) \mid h : \mathbb{R}^n$上の local diffeo$\}$，$\Gamma_E^{\mathcal{G}}(n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$．

この時，$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)^0 \ni f, g$ が $\mathcal{G}_E$-equivalent とは，次の図式が可換なことである：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array} \qquad \text{for } h : \text{invertible germ.}$$

これについて，$\theta_E^{\mathcal{G}}(n) = \theta(n)$ となり，定義1.11.における条件(b)は満足しているが，(c)の条件，$T_f^{\mathcal{G}} : \theta(n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ が $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-homo という条件は満足しないので，$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$，

$\mathscr{g}_E(n)$. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) は essential ではない．事実，この場合には，"versality theorem" が成立しない例が知られている．([1]).

A－3）　$E(M) = T(M)$

この時：$\Gamma_T^\infty(n)$ はベクトル場の原点における芽である．この場合 $\mathscr{g}_T(M) \equiv \{(\varphi, d\varphi) \mid \varphi$: M上の local diffeo $\}$ とすると，$\Gamma_T^\infty(n)$ における $\mathscr{g}_T$-equivalence とは，ベクトル場の C^∞ 座標変換による同値関係をあらわす．また，$\Theta_T^{\mathscr{g}}(n) \cong \theta(n)$ であり infinitesimal map $T_X^{\mathscr{g}} ; \theta(n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ は Lie derivative $T_X^{\mathscr{g}}(Y) = L_Y X$ によりあたえられるので（計算によりわかる）これは $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ − homo ではない。従って，$(\Gamma_T^\infty(n), \mathscr{g}_T(n), C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ は essential でない．事実，この場合にも "versality theorem" は成立しない事が知られている（[1]）．

A－4）　$E(M) = \bigwedge_p T^*(M)$

この時，differentiable p－forms の芽について考えている事になるが，この場合も，座標変換による同値関係を考えると，ベクトル場と同様に Lie derivative が $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ − homo でないという理由により，essential ではない．しかし，この場合は，まだ "versality theorem" が成立しない例はみつかっていない．（おそらくあるであろうと予想される）．

A－5）　$E(M) = \bigoplus_p T^*(M)$

この場合 $\Gamma_E^\infty(n)$ の元は local pfaffian system を表わしている．

$w=(w_1,\dots,w_p)$ をPfaffian systemの原点におけるgermとする時，wの特異点xとは，$w_i(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\,dx_j$ と表示した時，行列 $(a_{ij}(x))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ が退化する点の事である．これについて，一番自然な同値関係は，もちろん座標変換によるものであるがこれはP-formsの場合と同じ理由によりessentialとはならない．しかし，今，wの特異点の分岐のみに注目する場合，行列 $(a_{ij}(x))$ のrankを不変にする様なequivalenceの中で良い性質をもっているもの（i.e なるべく細かい同値関係でしかも代数的条件で決まるもの i.e map の場合の$\mathcal{K}$-同値の様なもの）で十分であろう．たとえば，

$g_{\oplus TM}(M)=\{(h_*^{-1}\underset{p}{\oplus}H^*)\mid H:TM\to TM$: vector bundle aut s.t. Hはhをcoverする$\}$ がその1つの候補となるであろう．これらの同値関係と座標変換の関係は今後の研究におうところが大きい．

A－5）　一般に，$E(M)$ をvector bundleとする時．

$D:\Gamma_E^\infty(M)\longrightarrow\Gamma_E^\infty(M)$ をlinear partially differential operatorとする．$\Gamma_E^\infty(M)\ni\alpha$ について，$D^{-1}(\alpha)\equiv\Gamma_E^D(M)_\alpha$ とおくとき，$C_0^D(\mathbb{R}^m,V(\mathbb{R}^m))=\pi_V(D^{-1}(0))$ となる．従って，$C_0^D(\mathbb{R}^m,V(\mathbb{R}^m))$ は $e_i:\mathbb{R}^m\longrightarrow V(\mathbb{R}^m)$　$e_i(x)=(0,\dots,0,\overset{i}{1},0\cdots0)$ $(i=1,\dots,\dim V(\mathbb{R}^m))$ を含む．故に，$\langle C_0^D(\mathbb{R}^m,V(\mathbb{R}^m))\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m)}=C_0^\infty(\mathbb{R}^m,V(\mathbb{R}^m))$ となり，定義1.11.の(a)は常に満足する．(21)

従って，定義1.11における(b)(c)の条件を満足するような同値関係 $\mathcal{G}_E(n)$ （A－1)におけるもの等）に対しては次の定理が成立する

<u>定理3.3.</u> $\dim_{\mathbb{R}} \dfrac{C_0^\infty(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n))}{C_0^D(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) + T\alpha(\theta_{\mathcal{G}_E(n)})} < +\infty$ <u>を満足する</u>
$\alpha \in \Gamma_E^D(n)$ <u>に対して</u>，α<u>のD-unfolding</u> Σ <u>が</u>
$C_0^D(\mathbb{R}^n, V(\mathbb{R}^n)) \subset T\alpha(\theta_{\mathcal{G}_E(n)}) + V_\Sigma$ <u>を満足するならば</u>，
Σ<u>はversal D-unfolding relative to $\mathcal{G}_E$ である</u>.

もっと具体的に，$E(M) = M \times \mathbb{R}$，Dとしてラプラシアン$\Delta$をとると$\Gamma_E^D(n)_g$ はポアッソンの方程式 $\Delta u = g$ を満足するような $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 全体の事である．この時 $C_0^\Delta(\mathbb{R}^n) = \pi_V(\Delta^{-1}(0))$ は調和関数全体となり，以下の定理を得る

<u>定理3.4.</u> $\dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n) / \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ <u>を満足する</u>
$f \in \Gamma_E^\Delta(n)_g$ <u>に対して</u>，f<u>のΔ-unfolding</u> F<u>が</u>
$C_0^\Delta(\mathbb{R}^n) \subset \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} + V_F$ <u>を満足するならば</u>，
F<u>はversal Δ-unfolding relative to $\mathcal{R}$ である</u>.

特に $\Gamma_E^D(n)_0 = C_0^\Delta(\mathbb{R}^n)$ （i.e.調和函数）の場合，調和函数をポテンシャルとしてもつ様な現象の定性的研究に，この定理は応用できるものと思われる．

B) $R(n) = C_0^G(\mathbb{R}^n) = \{ f \mid f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$: G-invariant C^∞-function germ$\}$ （Gはcompact Lie groupで $\mathbb{R}^n$ 上にlinearにact）の時.

B − 1)　$E(M) = M \times \mathbb{R}^p$　（M は G-manifold）.

① $\mathcal{G}_E(M) \equiv \mathcal{R}_G(M) = \{(h, h \times L) \mid h : M$ 上の local equivariant diffeo $L : \mathbb{R}^p$ 上の平行移動$\}$. M として linear G-action の入った $\mathbb{R}^n$ をつかう. $\Gamma_E^{\wedge}(n) = \{\alpha \in \Gamma_E^{\infty}(n) \mid \alpha$ は equivariant$\}$ とおくと，実は. $\Gamma_E^{\wedge}(n) = C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \{f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \mid f(gx) = f(x)$ for $^{\forall}g \in G\}$ である. さらに，Schwartz [8] により，$C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ は有限生成 $C_0^G(\mathbb{R}^n)$-module であることが知られている. また，$f \in C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ に対して，$T_f^{\mathcal{R}_G} = df : \theta_G(n) \to C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$（ただし，$\theta_G(n) \equiv \{\xi \in \theta(n) \mid \xi(gx) = Tg.\xi(x)$ for $g \in G$, $x \in (\mathbb{R}^n, 0)\}$ とする）であり これは $C_0^G(\mathbb{R}^n)$-homo である. 従って，$(C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\ \mathcal{R}_G(n), C_0^G(\mathbb{R}^n))$ は essential triple である. この場合，$\mathcal{R}_G$-equivalence とは invariant maps のあいだの G-right-equivalence であり，$J_G(f) \equiv df(\theta_G(n))$ とおくと次の定理が得られる.

<u>定理 3.5.</u>（Poènaru [7]）F <u>を</u> $f \in C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ <u>の G-unfolding とする，この時</u>

$C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = J_G(f) + V_F$ <u>をみたすならば</u>，F <u>は versal G-unfolding relative to $\mathcal{R}_G$ である</u>.

② $\mathcal{G}_E(M) = \mathrm{Aut}_G^V(M) := \{(h, H) \mid H$ は $M \times \mathbb{R}^p$ の local G-vector bundle aut で h を cover する$\}$（ただし G は $\mathbb{R}^p$ 上の表現をもつとする）. ① と同様に M として，linear G-action の入った $\mathbb{R}^n$ を使う. この時 $\Gamma_E^{\wedge}(M) = C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \equiv \{f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \mid$

$f(gx) = g \cdot f(x)$ for $\forall x \in (\mathbb{R}^n, 0)$, $g \in G\}$ とするとき，$C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ における $\mathcal{G}_E$-equivalence とは equivariant map-germs のあいだの G-contact equivalence であり，この意味で $\mathcal{G}_E(n) = \mathcal{K}_G(n, p)$ とかく．$(C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \mathcal{K}_G(n, p), C_0^G(\mathbb{R}^n))$ は essential triple となり次の定理が従う．

<u>定理 3.6.</u> F<u>を</u> $f \in C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ <u>の G-unfolding とする，</u>
<u>この時</u>

$C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = J_G(f) + f^*(m_p) C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \cap C_0^G(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) + V_F$ <u>をみたすならば</u>，F <u>は versal G-unfolding relative to $\mathcal{K}_G$ である</u>．

c) $R(n) = \mathbb{R}$

いかなる vector 束においても，その section-germs の空間の jet（有限）をとってやると，affine subspace になればすべて，essential triple となり，上記の example はすべて "versality theorem" が成立する様になる．

文　献

[1] Belitskii, G. R. : Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings, Russian Math. Surveys 33, 107-177 (1978).

[2] Golubitsky, M., Schaeffer, D. :A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, Commun. Pure Appl. Math. 32, 21-98 (1979).